MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 2 (problème)

Durée : 3 heures

Toute affirmation non correctement justifiée sera considérée comme nulle.

Les deux parties sont indépendantes.

Notations

Les matrices considérées dans le problème sont à termes réels.
Soit $p \in \mathbb{N} (p \geqslant 1)$.
On désignera par K_p l'espace vectoriel des (p,1) matrices.

Une (1,1) matrice sera identifiée à son terme réel.

Ainsi si U et $V \in K_p$, ${}^tU.V = {}^tV.U$ sera considéré comme un nombre réel (${}^tU$ désigne la transposée de U).

On définit sur K_p un produit scalaire par $\langle U,V \rangle = {}^tU.V$ et on note $\|U\| = \sqrt{{}^tU.U}$ la norme associée.
On notera 0_p la matrice de K_p dont tous les termes sont nuls.

Question préliminaire

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sous-jacent.
On donne dans ce plan rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ cinq points M M_2, M_3, M_4, M_5:

$M_1(-2,0)$, $M_2(-1,0)$, $M_3(0,2)$, $M_4(1,2)$, $M_5(2,1)$

On notera (x_i, y_i) les coordonnées du point M_i $i = 1,5$

Vérifier que ces cinq points ne sont pas alignés.

1ère PARTIE

1°) Soit dans $\mathcal{P}$ une droite D d'équation $y = ax + b$ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer en fonction de a et b la somme $\delta(a,b) = \sum_{i=1}^{i=5} (y_i - ax_i - b)^2$

b) Montrer qu'il existe une seule droite D_0 d'équation $y = a_0 x + b_0$ rendant $\delta(a,b)$ minimum.
Préciser la valeur de ce minimum et représenter graphiquement les points M_i et la droite D_0.

2°) Soient Q et R les matrices:

$$Q = \begin{Vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Vmatrix}$$

Soit $Z \in K_2$: $Z = \begin{Vmatrix} a \\ b \end{Vmatrix}$

Calculer $\delta(a,b)$ en fonction de $\|Q.Z - R\|$

3°) Soit S une (n,m) matrice donnée (n lignes, m colonnes); on suppose $n \geqslant m$.
Soit T une (n,1) matrice donnée (n lignes, 1 colonne).

$X_0 \in K_m$ **sera dite pseudo solution du système** $S.X - T = 0_n$ $(\mathcal{S}_0)$

si $\|S.X_0 - T\| < \|S.X - T\|$ $\forall X \in K_m$.

a) Montrer que si $(\mathcal{S}_0)$ a des solutions, les pseudo solutions de $(\mathcal{S}_0)$ sont les solutions de $(\mathcal{S}_0)$.

b) Montrer que si X et $Y \in K_m$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|S.(X + \lambda Y) - T\|^2 = \|S.X - T\|^2 + 2\lambda {}^tY.{}^tS.(S.X - T) + \lambda^2 \|S.Y\|^2$$

c) En déduire que les pseudo-solutions de $(\mathcal{S}_0)$ sont les solutions du système:

$${}^tS.S.X = {}^tS.T \quad (\mathcal{S}_1)$$

4°)

a) Montrer que les systèmes ${}^tS.S.X = 0_m$ $(\mathcal{S}_2)$ et $S.X = 0_n$ $(\mathcal{S}_3)$ ont les mêmes solutions (on explicitera $\|S.X\|^2$).

.../...

b) Soit r le rang de S.
Exprimer en fonction de m et r la dimension de l'espace des solutions du système $S.X = 0_n$

Quel est le rang de ${}^tS.S$?

5°) On suppose que le rang de S vaut m. Montrer que $(\mathcal{S}_0)$ a une pseudo-solution unique X_0 qu'on exprimera en fonction de S et T.

6°)
a) Quel est le rang de Q?

b) Montrer que le résultat du 5°) permet de retrouver celui du 1°)b).

2ème PARTIE

1°) Soit D une droite du plan $\mathcal{P}$ définie par un de ses points Ω et un vecteur $\vec{v} \in \mathcal{E}$, $\vec{v}$ non nul, orthogonal à la direction de D.

Pour $N \in \mathcal{P}$, on note d(N,D) la distance de N à D.

Exprimer d(N,D) en fonction de $(\vec{\Omega N}.\ \vec{v})$, où $(\vec{\Omega N}.\ \vec{v})$ désigne le produit scalaire de ces vecteurs dans $\mathcal{E}$.

2°) Soient (N_i) $i = 1,n$ n points de $\mathcal{P}$.

On cherche D rendant minimum $\Delta = \sum_{i=1}^{i=n} (d\ (N_i,D))^2$.

a) Comparer Δ et $Q_\Omega(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{i=n} (\vec{\Omega N_i}.\ \vec{v})^2$.

b) Montrer que $\forall\ \Omega \in \mathcal{P}$, l'application $\vec{v} \longrightarrow Q_\Omega\ (\vec{v})$ est une forme quadratique positive sur $\mathcal{E}$.

Indiquer la forme polaire de Q_Ω

c) Soit G le barycentre des points N_i affectés chacun du coefficient 1.

Calculer $Q_\Omega(\vec{v})$ en fonction de $Q_G\ (\vec{v})$.

d) Comment faut-il choisir Ω pour rendre minimum:
$$Q_\Omega(\vec{v}) - Q_G\ (\vec{v}) \quad \forall\ \vec{v} \in \mathcal{E},\ \vec{v} \text{ non nul.}$$

<u>On suppose désormais n = 5 et $N_i = M_i$ pour i = 1,5</u>

3°)
a) Déterminer G et calculer la matrice de Q_G dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

b) Déterminer une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ orthonormée de $\mathcal{E}$ dans laquelle la matrice de Q_G est diagonale.

c) Pour $\vec{v} \in \mathcal{E}$, on écrit $\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2$.

Calculer $Q_G(\vec{v})$ en fonction de α_1 et α_2.

d) Déterminer parmi les vecteurs $\vec{v}$ unitaires ceux qui rendent $Q_G\ (\vec{v})$ minimum.

4°)
a) Déduire des questions précédentes l'existence d'une droite D_1 unique rendant Δ minimum et calculer ce minimum.

b) Représenter graphiquement les points (M_i) $i = 1,5$ et la droite D_1.